УДК 517.9

А. С. Миненко

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Исследуется осесимметричное потенциальное течение в достаточно длинной области. Установлена классическая разрешимость соответствующей краевой задачи, когда на свободной границе задано условие Бернулли в виде неравенства. Доказательство основано на вариационной природе задачи, методе внутренних вариаций Шиффера и симметризации Штейнера. При этом свободная граница является монотонно возрастающей аналитической дугой. Методом Ритца строится также приближенное решение задачи, сходящееся к точному решению в интегральной метрике.

Большой класс нелинейных краевых задач содержит в качестве неизвестного область или часть границы, называемой свободной границей. Среди указанных проблем несомненный интерес представляют задачи, имеющие вариационную природу. Возникающий при этом функционал может быть минимизирован различными способами. Однако принципиально различными подходами при исследовании этих функционалов можно считать лишь те, которые изложены в [1, 2]. Отметим также, что впервые обоснование применения метода Ритца при численной минимизации функционала с неизвестной областью интегрирования получено в [3].

1. Постановка задачи. Изучается осесимметричное течение жидкости, когда ось x является осью симметрии потока, а на свободной границе задается условие Бернулли. Введем следующие обозначения. Пусть G — область, ограниченная снизу отрезком $B = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = 0)$, по бокам вертикалями $\Gamma_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant c)$, $\Gamma_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ и сверху кривой $S : y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, а $g(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая функция, такая, что $g'(0) = 0$. Далее, пусть γ — достаточно гладкая кривая без самопересечений, расположенная в $G \cup S$. Предполагается, что одним концом γ служит точка $(0, c)$, а другой расположен на Γ_2, причем все точки γ, исключая левый конец $(0, c)$, лежат выше горизонтали $y = c$. Наконец, через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать область, ограниченную отрезком B, вертикалями Γ_1, Γ_2 и кривой γ.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. Необходимо найти пару (ψ, γ), где $\psi(x, y)$ — функция тока, по следующим условиям:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - y^{-1}\psi_y = 0, \quad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \geqslant v^2 y^2, \quad (x, y) \in \gamma, \quad v = \text{const} > 0, \tag{5}$$

причем на части γ, лежащей внутри G, в условии (5) должно выполняться равенство.

Решение задачи (1) — (5) описывает осесимметричный поток жидкости в достаточно длинной части области G, когда задана на бесконечности поперечная скорость вытекания струи. Основным отличием рассматриваемой задачи от изучаемых ранее [1, 2] является наличие неравенства в условии (5) на части γ, совпадающей с S. В случае двух геометрических переменных задача (1) — (5) изучена в [4]. Отметим также, что в качестве области G могут быть взяты расширяющийся канал либо сопло.

2. Вариационная природа задачи (1) — (5). Введем в рассмотрение функционал с неизвестной областью интегрирования

$$J(\psi, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + v^2 y^2)\, \frac{dx\,dy}{y} \tag{6}$$

на множестве R допустимых пар (ψ, γ), удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки $(0, c)$ и (a, b), причем все точки γ, исключая точку $(0, c)$, находятся выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ — непрерывна в замыкании области G_γ, равна единице на γ, нулю на B и имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ, причем $J(\psi, \gamma) < \infty$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть пара (ψ, γ) является классическим решением задачи (1) — (5). Тогда эта пара будет стационарной для функционала (6) на множестве R. И наоборот, каждая стационарная пара (ψ, γ) функционала (6) на множестве R, где γ — достаточно гладкая кривая без самопересечений, является решением задачи (1) — (5).

Доказательство. Предположим, что концы свободной границы проходят через точки $(0, c)$ и (a, b). Тогда из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования следует, что

$$\delta J(\psi, G_\gamma; \overline{\delta\psi}, \overrightarrow{\delta z}) = -2\iint\limits_{G_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\psi_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\psi_y\right)\right]\overline{\delta\psi}\,dxdy +$$

$$+2\int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\frac{1}{y}\frac{\partial\psi}{\partial n}\overline{\delta\psi}\,ds + \int\limits_{\gamma}[v^2y^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2]\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{\delta z})}{y}\,ds. \tag{7}$$

Здесь $\overline{\delta\psi}$ — вариация функции ψ при неизменной области интегрирования, $\overrightarrow{\delta z} = (\delta x, \delta y)$ — вариация независимых переменных при переходе от области G_γ к некоторой близкой к ней области, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль. Учитывая, что каждая из компонент пары (ψ, γ) может варьироваться независимо одна от другой в пределах допустимости, получим необходимое утверждение. Заметим также, что на части γ, совпадающей с S, должно выполняться условие $(\vec{n}, \overrightarrow{\delta z}) \geqslant 0$. Отсюда будет следовать, что в этом случае в условии (5) всегда справедливо неравенство. Наконец, если концы γ проходят через точки $(0, c)$, (a, h), где $c < h < b$, тогда функционал (6) необходимо рассмотреть на множестве допустимых пар R_h. При этом R_h отличается от R лишь тем, что концы кривой γ проходят через точки $(0, c)$, (a, h) и все ее точки расположены ниже прямой $y = h$ (более подробно этот случай рассмотрен при доказательстве теоремы существования). Лемма доказана.

3. Симметризация области G_γ. Будем считать γ — фиксированной допустимой кривой, т. е. область G_γ предполагается заданной. Построим решение линейной задачи (1) — (4) в области G_γ. Для этого введем в рассмотрение множество U допустимых функций $\psi(x, y)$, непрерывных в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемых в G_γ, равных нулю на отрезке B, единице на γ и таких, что функционал

$$L(\psi) = \iint\limits_{G_\gamma}(\psi_x^2 + \psi_y^2)\frac{dxdy}{y}$$

всегда принимает на U конечные значения.

Лемма 2. Существует единственная функция $\psi(x, y) \in U$, на которой функционал $L(\psi)$ достигает своего наименьшего значения. Эта функция является единственным решением задачи (1) — (4). Если γ является также спрямляемой кривой, тогда справедливо следующее представление:

$$J(\psi, \gamma) = \int\limits_{B}\left|\frac{1}{y}\psi_y(x, y)\right|\Bigg|_{y=0}dx + v^2\iint\limits_{G_\gamma}y\,dxdy. \tag{8}$$

Доказательство леммы проводится аналогично тому, как это сделано в работе [4]. При этом отметим, что так как решение задачи (1) — (4) может быть представлено в виде $\psi(x, y) = y^2\alpha(x, y)$, где $\alpha(x, y)$ — достаточно гладкая функция, то

$$\int\limits_{B}\left[\frac{1}{y}\psi_y(x, y)\right]\Bigg|_{y=0}dx = 2\int\limits_{0}^{a}\alpha(x, 0)\,dx.$$

Определим теперь симметризацию области G_γ относительно осей координат по Штейнеру через симметризацию дополнения $\Omega = \Pi \setminus G_\gamma$, $\Pi = (0 < x < a,\ 0 < y < b)$ относительно оси x и прямой $y = b$ с последующим продолжением функции $\psi(x, y)$ единицей в Ω. Справедлива лемма.

Лемма 3. Пусть $\psi(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в области G_γ, а $\psi^*(x, y)$ — решение этой же задачи в просимметризованной относительно осей координат области G^* со свободной границей γ^*. Тогда $J(\psi^*, \gamma^*) \leqslant J(\psi, \gamma)$, причем $\psi^*_x(x, y) < 0$, $\psi^*_y(x, y) > 0$ в G^*, а γ^* задается уравнением

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — монотонно возрастающие функции.

Доказательство леммы опирается на методику работ [2, 4] и лемму 2.

4. Доказательство теоремы существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве R, а (ψ_n, G_n) — минимизирующая последовательность. На основании леммы 3 свободные границы областей G_n задаются при помощи уравнений (9). В силу леммы 2 в качестве функций $\psi_n(x, y)$ берутся решения задачи (1) — (4) в области G_n. Далее, ввиду монотонности кривых γ_n из последовательности $\{\gamma_n\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой предельной кривой γ, в системе координат (ξ, η), повернутой относительно (x, y) на угол $\pi/4$ в положительном направлении. При этом предельная кривая γ не обязательно является допустимой, так как может иметь общие отрезки с вертикалью Γ_2 и горизонталью $y = c$. Установим теперь компактность последовательности $\psi_n(x, y)$, исходя из субгармоничности этих функций, ибо $\psi_{ny}(x, y) > 0$ в G_n. В силу принципа максимума нетрудно показать, что $0 \leqslant \psi_n(x, y) \leqslant 1$ в $\overline{G}_n$. Учитывая затем, что потенциал скорости $\varphi_n(x, y)$ является функцией, гармонической в G_n и $\varphi_x = y^{-1}\psi_y$, $\varphi_y = -y^{-1}\psi_x$, можно установить равномерную ограниченность производных любого порядка функций $\psi_n(x, y)$ в каждой замкнутой подобласти предельной области G_γ, не содержащей точек γ и B. Отсюда будет следовать, что предельная функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в G_γ. Используя затем оценку $y^2/b^2 \leqslant \psi_n(x, y) \leqslant y^2/c^2$, имеющую место при $x \in [0, a]$, $y \in [0, c]$, доказывается, что $\psi(x, 0) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, т. е. условие (2) выполняется. Далее, функция $\psi(x, y)$ продолжается по непрерывности единицей в каждую внутреннюю точку $z_0 = x_0 + iy_0$ кривой γ. Для этого в плоскости $z = x + iy$ необходимо провести разрез вдоль луча l, проходящего через z_0 под углом $\pi/4$ к оси абсцисс, и воспользоваться неравенством

$$|\psi_n(z) - 1| \leqslant A \operatorname{Re}[e^{i\pi/4}(z - z_n)]^{1/2}, \quad z_n \in \gamma_n, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

справедливым для любого $z \in \overline{G}_n$ при достаточно большом значении постоянной A. Отсюда, беря в качестве z произвольную точку области G_γ и переходя к пределу при $n \to \infty$ и $z \to z_0$, получим требуемое утверждение. Таким образом, предельная функция $\psi(x, y)$ является решением задачи (1) — (4) и $J(\psi, \gamma) < \infty$. Применяя теперь лемму 2, получаем

$$\iint_{G_\gamma} (|\nabla\psi|^2 + v^2 y^2) \frac{dxdy}{y} = 2\int_B \alpha(x, 0)\, dx + v^2 \iint_{G\gamma} y\,dxdy.$$

Используя затем равномерную сходимость $\psi_n = y^2\alpha_n(x, y)$ к $\psi = y^2\alpha(x, y)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$, а тогда и $\alpha_n(x, 0)$ к $\alpha(x, 0)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, докажем, что

$$d = \lim_{n\to\infty} \left[2\int_B \alpha_n(x, 0)\, dx + v^2 \iint_{G_\gamma} y\,dxdy \right] = J(\psi, \gamma).$$

Наконец, воспользовавшись внутренними вариациями Шиффера [2], можно установить, что условие (5) на части γ, лежащей внутри G, выполняется почти всюду.

Дальнейшее исследование предельной кривой γ приводит к следующей лемме.

Лемма 4. Пусть выполнены условия

$$vc^2 < 2, \quad 2a < vc^2 \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\, dx. \tag{10}$$

Тогда предельная область G_γ не может совпадать с G и все точки кривой γ, исключая левый конец $(0, c)$, лежат выше прямой $y = c$.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть G_γ совпадает с G. Тогда, используя равенство

$$\int_\gamma \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds = 2 \int_B \alpha(x, 0)\, dx$$

и оценки $\psi(x, y) = y^2 \alpha(x, y) \leqslant y^2/c^2$, $\alpha(x, y) \leqslant 1/c^2$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant c$, приходим к неравенству

$$2a \geqslant v \cdot c \int_0^a \sqrt{1 + g_x^2}\, dx,$$

которое противоречит предположению леммы.

Далее, пусть γ частично совпадает с отрезком $\gamma_0 = (0 \leqslant x \leqslant a,\ y = c)$. Тогда $\psi_0(x, y) = y^2/c^2$ является решением задачи (1) — (4) в $G_{\gamma_0} = (0 < x < a,\ 0 < y < c)$. Вычислим вариацию функционала (6) на паре (ψ_0, γ_0) при достаточно малых значениях $\max |\vec{\delta z}|$, $(\vec{n}, \vec{\delta z}) \geqslant 0$ и $\vec{\delta z} = 0$ в точках $(0, c)$ и (a, c). Из формулы (7) следует, что

$$\delta J(\psi, G_\gamma; \overline{\delta\psi}, \vec{\delta z}) = \int_{\gamma_0} y^2 \left[v^2 - \frac{4}{c^4}\right] \frac{(\vec{n}, \vec{\delta z})}{y}\, ds < 0.$$

Следовательно, для варьированной области G_{γ_1} и решения $\psi_1(x, y)$ задачи (1) — (4) в ней имеем $J(\psi_1, \gamma_1) < J(\psi, \varphi) = J(\psi_0, \gamma_0) = d$. Теперь так же, как это сделано в работе [4], можно построить допустимую пару $(\psi_2, \gamma_2) \in R$, такую, что $d \leqslant J(\psi_2, \gamma_2) \leqslant J(\psi_1, \gamma_1) < d$. Итак, получили противоречие. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

Отметим, что методика работ [2, 5] позволяет доказать, что γ является аналитической дугой в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G. Сформулируем теперь теорему существования.

Теорема 1. Пусть S — дважды непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая кривая, заданная уравнением $y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $g(0) = c$, $g(a) = b$, $g'(0) = 0$. И пусть выполнены условия (10). Тогда существует единственное решение задачи (1) — (5). При этом пара (ψ, γ) удовлетворяет следующим условиям: γ — монотонно возрастающая дуга, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри G; $\psi(x, y)$ — функция, непрерывная в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируемая всюду в $\overline{G}_\gamma$, исключая точку (a, h), $c < h \leqslant b$, являющуюся правым концом γ и $\psi_y(x, y) > 0$ в G_γ.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда предельная кривая γ частично совпадает с Γ_2, т. е. содержит отрезок $x = a$, $h \leqslant y \leqslant b$, где $c < h$. Обозначим через γ_0 часть γ, лежащую в G, концами которой являются точки $(0, c)$ и (a, h). Очевидно, что $J(\psi, \gamma) = J(\psi, \gamma_0) = d$. Далее, рассмотрим задачу о минимуме функционала (6) на множестве допустимых пар R_h и покажем, что пара (ψ, γ_0) является решением этой задачи. Действительно, пусть d_h — точная нижняя грань функционала (6) на множестве R_h. Тогда, учитывая, что $(\psi, \gamma_0) \in R$, имеем $d_h \leqslant J(\psi, \gamma_0) = d$, т. е. $d_h \leqslant d$. В то же время, возьмем произвольную пару (ψ, γ), причем в качестве $\psi(x, y)$ можно взять решение задачи (1) — (4) в G_γ. Затем, используя кривую γ, построим другую кривую γ_1 — допустимую в смысле R и такую, что $G_\gamma \subset G_{\gamma_1}$. Пусть $\psi_1(x, y)$ — решение задачи (1) — (4) в G_{γ_1}. Очевидно, имеем $\psi(x, y) - \psi_1(x, y) \geqslant 0$ в $\overline{G}^\gamma$. Отсюда, учитывая, что $\psi(x, y) = y^2 \alpha(x, y)$, $\psi_1(x, y) = y^2 \alpha_1(x, y)$, заключаем также, что $\alpha(x, y) - \alpha_1(x, y) \geqslant 0$ в $\overline{G}_\gamma$.

Далее, аналогично тому, как это сделано в [4], получим неравенство

$$d \leqslant J(\psi_1, \gamma_1) \leqslant J(\psi, \gamma) + v^2 \operatorname{mes}(G_{\gamma_1}/G_\gamma) < d_h + \varepsilon.$$

Здесь $v^2 \operatorname{mes}(G_{\gamma_1} \setminus G_\gamma) < \varepsilon$. Следовательно, $d < d_h + \varepsilon$. При стремлении $\varepsilon \to 0$, приходим к неравенству $d \leqslant d_h$. Таким образом, $d = d_h = J(\psi, \gamma_0)$, т. е. (ψ, γ_0) является решением задачи (1) — (5), когда правый конец γ — точка (a, h), и $h < b$. Теорема доказана.

5. Приближенное решение задачи (1) — (5) методом Ритца. В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) — (5) удовлетворяет условиям $\psi(x, y) \in C^1(\bar{G}_\gamma)$, $\psi_y(x, y) > 0$ в $\bar{G}_\gamma$, а кривые γ и S имеют конечное число общих точек. Следуя известной методике Фридрихса [6], представим функционал (6) следующим образом:

$$J_1(z) = \iint_\Delta \left| \left(z_x + \frac{g_x}{g} z\right)^2 + \frac{1}{g^2} + v^2 g^2 z^2 z_\varphi^2 \right| \frac{dx d\varphi}{z z_\varphi}, \tag{11}$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$; $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$; $z(x, \varphi)$ — решение уравнения $\varphi(x, z) - \varphi = 0$. Функционал (11) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \{z : z \in C(\bar{\Delta}), \sqrt{\varphi} z_\varphi \in C(\bar{\Delta}), z(0, 1) = 1, z(x, 0) = 0, \min_{(x,y)\in\bar{\Delta}} \sqrt{\varphi} z_\varphi > 0\}. \tag{12}$$

Через $z_0(x, \varphi)$ обозначим функцию, соответствующую решению задачи (1) — (5). Очевидно, что $z_0 \in D_z$, и z_0 может быть представлено в виде $z_0 = \sqrt{\varphi}\, \omega(x, \varphi)$, где $\omega(x, \varphi)$ — достаточно гладкая функция и $\omega(x, 0) \neq 0$.

Лемма 5. Элемент $z_0(x, \varphi)$, соответствующий решению задачи (1) — (5), доставляет наименьшее значение функционалу (11) на множестве (12).

Доказательство. Положим $w(x, \varphi) = \ln z(x, \varphi)$. Тогда семейство допустимых функций D_z перейдет в новое семейство D_w, при этом функционал (11) и его вторая вариация примут вид

$$J_2(w) = \iint_\Delta \left| \left(w_x + \frac{g_x}{g}\right)^2 + \frac{e^{-2w}}{g^2} + v^2 g^2 e^{2w} w_\varphi^2 \right| \frac{dx dy}{w_\varphi}, \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} J_2(w_\varepsilon) = 2 \iint_\Delta \left\{ \left[w_{\varepsilon\varphi} \delta w_x - \delta w_\varphi \left(w_{\varepsilon x} + \frac{g_x}{g} \right) \right]^2 + \frac{e^{-2w_\varepsilon}}{g^2} [w_{\varepsilon\varphi}^2 \delta w^2 + \right.$$

$$\left. + (w_{\varepsilon\varphi} \delta w + \delta w_\varphi)^2] \right\} \frac{dx d\varphi}{w_{\varepsilon\varphi}^3} + 2v^2 \int_0^a g^2(x) e^{2w_\varepsilon(x,1)} \delta w^2(x, 1)\, dx, \tag{14}$$

где $J_1(z) = J_1(e^w) = J_2(w)$, $w_\varepsilon = w_0 + \varepsilon \delta w$, $\delta w = w - w_0$, $w_0 = \ln z_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, w — произвольный элемент из D_w. Используя теперь формулу Фридрихса [6]

$$J_2(w) = J_2(w_0) + \frac{d}{d\varepsilon} J_2(w_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1 - \varepsilon) \frac{d^2 J_2(w_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon \tag{15}$$

и учитывая, что первая вариация функционала (13), вычисленная на элементе w_0, неотрицательна, заключаем, что $J_1(z_0) = J_2(w_0) \leqslant J_2(w) = J_1(z)$ для любого элемента $z \in D_z$. Лемма доказана.

Будем минимизировать функционал (11) на множестве (12) при помощи сумм

$$z_n(x, \varphi) = \sqrt{\varphi} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad n = \sup_{0 \leqslant k \leqslant m} (k + m_k). \tag{16}$$

Включение $z_n \in D_z$ выделяет в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r, где

$$r = \sum_{k=0}^{m} (m_k + 1), \ D_r = E_r^0 \cap D_r^+, \ E_r^0 : \sum_{k=0}^{n} a_{k0} - 1 = 0,$$

$$D_r^+ = \{a_{kj} : z_n \in C(\bar{\Delta}),\ \sqrt{\varphi}\, z_{n\varphi} \in C(\bar{\Delta}),\ z_n(0, 1) = 1,\ z_n(x, 0) = 0,$$
$$\min_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} \sqrt{\varphi}\, z_{n\varphi} > 0\}.$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца:

$$\frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{p0}} + \lambda = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m;$$
$$\frac{\partial J_3(a_{kj})}{\partial a_{pq}} = 0, \quad q = 1, 2, \ldots, m_p, \quad p = 0, 1, \ldots, m; \tag{17}$$
$$\sum_{k=0}^{m} a_{k0} - 1 = 0,\ J_3(a_{kj}) = J_1\left(\sqrt{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^j\varphi^k\right).$$

Теорема 2. Система уравнений (17) имеет единственное решение. При этом функция $J_3(a_{kj})$ достигает своего наименьшего значения в некоторой точке множества D_r, находящейся на конечном расстоянии от начала координат.

Доказательство. Обозначим через R_n^2 выражение

$$R_n^2 = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}^2, \quad n = \sup_{0\leqslant k\leqslant m_k} (k + m_k),$$

и пусть $R_n \to \infty$ при фиксированном номере n. Тогда можно установить, что $J_3(a_{kj}) \to \infty$ при $R_n \to \infty$. Отсюда будет следовать, что функция $J_3(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке множества D_r, так как на границе этого множества функция $J_3(a_{kj})$ принимает неограниченные значения.

Таким образом, существует внутренняя точка множества D_r, в которой частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Следовательно, система уравнений (17) имеет решение. Теорема доказана.

6. Теорема сходимости. Решение системы уравнений (17) при каждом фиксированном значении n приводит к последовательности функций $z_n(x, 1)$, которая позволяет приближенно найти свободную границу γ_n задачи (1) — (5) в виде $y_n(x, 1) = g(x)\, z_n(x, 1)$. Справедлива теорема.

Теорема 3. Последовательность $z_n(x, 1)$ сходится по норме в $L_2(0, a)$ к $z_0(x, 1)$, где $z_0(x, \varphi)$ — элемент, соответствующий решению задачи (1) — (5).

Доказательство. Последовательность многочленов (16), коэффициенты которых удовлетворяют системе уравнений (17), образует минимизирующую последовательность для функционала (11) на множестве (12). Следовательно, имеем $\varepsilon_n = J_1(z_n) - J_1(z_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, из формулы (15) вытекает, что

$$\int_0^1 (1 - \varepsilon)\frac{d^2 J_2(w_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\, d\varepsilon \leqslant \varepsilon_n,$$

где $w_\varepsilon = w_0 + \varepsilon(w_n - w_0)$, $w_0 = \ln z_0$, $w_n = \ln z_n$. Отсюда можно получить неравенство

$$2v^2 \int_0^1 (1 - \varepsilon)\int_0^a g^2(x)\, e^{2w_\varepsilon(x,1)}\, \delta w^2(x, 1)\, d\varepsilon dx \leqslant \varepsilon_n, \quad \delta w = w_n - w_0,$$

которое после интегрирования по ε, с учетом того, что $\delta z = \delta w \exp(w_0)$, приводит к оценке

$$\int_0^a \delta z^2(x, 1)\, dx \leqslant 2\,\frac{\varepsilon_n}{v^2 c^2}, \quad \delta z = z_n - z_0.$$

Таким образом, $\| z_n(x, 1) - z_0(x, 1)\|_{L_2(0,a)} \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующее приближение: $z_1(x, \varphi) = (\alpha + \beta x^2) \times \times \sqrt{\varphi}/g(x)$, где α и β — коэффициенты, подлежащие определению. Учитывая, что $z_1(0, 1) = 1$, так как $z_1 \in D_z$, получаем $\alpha = c$. Далее, подставляя выражение для $z_1(x, \varphi)$ в функционал (11), после интегрирования имеем

$$J_1(z_1) = \frac{16}{5\beta}\left[-\frac{a}{4\left(\frac{c}{\beta}+a^2\right)} + \frac{a}{8\frac{c}{\beta}\left(\frac{c}{\beta}+a^2\right)} + \frac{1}{8\sqrt{\left(\frac{c}{\beta}\right)^3}}\operatorname{arctg} a\sqrt{\frac{\beta}{c}}\right] +$$

$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\beta^3}\left[\frac{a}{4\frac{c}{\beta}\left(\frac{c}{\beta}+a^2\right)^2} + \frac{3a}{8\frac{c}{\beta}\left(\frac{c}{\beta}+a^2\right)} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{\beta}\right)^5}} \times\right.$$

$$\left.\times \operatorname{arctg} a\sqrt{\frac{\beta}{c}}\right] + \frac{v^2}{2}\left|ac^2 + 2c\beta\frac{a^3}{3} + \beta^2\cdot\frac{a^5}{5}\right|$$

Неизвестный коэффициент β найдем из условия $dJ_1(z_1)/d\beta = 0$. Решим это уравнение, считая параметр a достаточно большим. Для этого положим $\sqrt{\beta}/\sqrt{c} = t$ и будем рассматривать t как функцию параметра a. Можно показать, что $a \cdot t(a) \to 0$ при $a \to \infty$, т. е. $t(a) = o(1/a)$. Разлагая теперь функцию $\operatorname{arctg} at$ в ряд Тейлора и отбрасывая члены порядка выше, $(at)^4$, находим

$$\beta = c\left[\frac{4 - cv^2}{\frac{32}{5} + \frac{3v^2a^2c}{5}} + o\left(\frac{1}{a^3}\right)\right].$$

Заметим, что в силу леммы 4 при малых c всегда $\beta > 0$. Таким образом, построив приближение $z_1(x, \varphi)$, можно выписать теперь уравнение свободной границы $y(x, 1) = g(x) z_1(x, 1)$ и вычислить ширину струи при $x = a$, т. е. $y(a, 1) = g(a) z_1(a, 1)$. Последние соотношения имеют практический интерес при исследовании струйных течений.

Численная минимизация функционала (11) на множестве (12) была осуществлена на приближении

$$z_7(x, \varphi) = \sqrt{\varphi}\,[a_{00} + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 + a_{04}x^4 + a_{05}x^5 + a_{06}x^6 +$$
$$+ \varphi(a_{10} + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_{14}x^4 + a_{15}x^5 + a_{16}x^6)].$$

Неизвестные коэффициенты Ритца a_{kj} определялись градиентным методом. Проведенная численная реализация задачи показала эффективность предложенного метода расчета.

Замечание. Описанные в этой статье методы минимизации нелинейных функционалов (6) и (7) в работах [3, 7, 8] применялись при решении нелинейной квазистационарной задачи типа Стефана. Аналогичный подход при рассмотрении подобного класса задач использовался также в [9].

1. *Alt H. W., Friedman A., Caffarelli L. A.* Axially symmetric jet flowes // Arch. Rational Mech. Anal.— 1983.— 81, N 2.— P. 97—149.
2. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math.— 1952.— 109, N 3.— P. 502—560.
3. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 4.— С. 291—294.
4. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейн. граничн. задачи.— 1991.— Вып. 3.— С. 60—66.
5. *Миненко А. С.* Об аналитичности свободной границы в одной теплофизической задаче // Мат. физика.— 1983.— Вып. 33.— С. 80—82.
6. *Friedrichs K. O.* Uber ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freie Rande // Math. Ann.— 1933.— 109, N 1.— P. 60—80.
7. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 6.— С. 413—416.
8. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной оптимизационной задаче со свободной границей // Там же.— 1976.— № 5.— С. 389—392.
9. *Crank J.* Free and moving boundary problems.— Oxford : University Press, 1984.— 425 p.

Донец. политехн. ин-т Получено 25.10.91